数理解析研究所講究録
680巻 1989年 208-216

あるBilateral Secretary Problemについて.

阪大基礎工数理　穴太克則
(Katsunori ANO)

§1.はじめに.

最適停止問題のひとつに有名なSecretary Problemがある。そのgame版とでもいうべきModelが最近10年ぐらいの間に研究されてきている。[cf. Roth, Kadane & DeGroot ('77), DeGroot & Kadane ('83), Sakaguchi ('84).]

Secretary Problem: ある意思決定者がSecretaryを1人雇用したいとする. n人のgirlsがSecretaryのpositionに対して, 毎期1人ずつ応募する. girlsの到着のし方は同様に等しい, すなわち, 到着の順列はn!通り. 意思決定者の知り得る情報はすでに応募してきたgirlsの相対的ランクのみとする. 彼は何らかの主観的基準により応募してきたgirlsにランク付けができるとする. 意思決定者はn人のgirlsのなかで真に最も良いランク(Bestと呼ぶとする)の人を採用する確率を最大にする最適停止政策を発見したい. 採用回数は1回のみでrecallはなし.

最適政策は『 $i^* = \min\{1 \le i \le n \mid \sum_{j=i}^{n-1} \frac{1}{j} \le 1\}$ なる i^* が存在し，i^*-1 までのgirlsはすべてpassし，i^* 以後最初に到着したキャンディデイト（相対ランク1のgirl，Cと書く）を採用しろ』というものである．

Bilateral Secretary Problem (B.S.P.)：意思決定者が2人，player Ⅰ とⅡがいる．secretary problemと同様に2人の前にn人のgirls（以下，objectsと呼ぶ）が逐次に到着するとする．player Ⅰ とⅡの知り得る情報は自分の目前にすでに到着し観測したobjectsの相対ランクのみとし，player ⅠとⅡに共通とする．先ず，player Ⅰがobjectをacceptするかrejectするかのoptionをもつ．player Ⅰがrejectしたときのみplayer Ⅱがそのobjectに対するoptionをもつ．recallは許されない．一方のplayerがacceptしたならば，他のplayerはacceptすることができない．"win"という事象をBestをacceptするとする．"lose"という事象をwinでないとする．利得は，

Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ
win	lose	+1	−1
lose	win	−1	+1
reject−rejectで終る		0	0

で与えられる0和ゲームとする．

このとき，両playerは期待利得を最大にしたい．最適政策は？

以上が基本となるModelであり，ここでは次の3タイプのB.S.Pを考える．最適政策は一体どのようなものになり，どう違いがでるのかを研究する．

§2. Non-Zero Sum 版.

§3. Best か 2nd Best を accept できたとき"win".

§4. object が player の accept の申し出を拒否する確率をもつ.

§2. Non-Zero Sum 版 B.S.P.

両playerの利得は各々無関係に,

I	II	I	II
win		+1	0
lose		−1	0
	win	0	+1
	lose	0	−1
rej.	rej.	0	0

$$\begin{cases} \text{player I が win のとき } +1,\ \text{lose のとき } -1. \\ \text{player II が win のとき } +1,\ \text{lose のとき } -1. \\ \text{両player がすべての object を reject したとき } 0, 0. \end{cases}$$

$\overline{V}(i), \overline{W}(i) \equiv$ それぞれplayer I, II が今までにacceptしていず, i番目のobjectに直面していて,かつそれが c_1 であり以後最適にふるまったときの最大期待利得.

最適性の原理から次の最適方程式が成立する.

(2.1) $\overline{V}(i) = \max\{2\frac{i}{n}-1,\ p_i\sum_{j=i+1}^{n}\frac{i}{j(j-1)}\overline{V}(j)\}$, $1\leqq i\leqq n-1$, $\overline{V}(n)=1$.

(2.2) $\overline{W}(i) = \max\{2\frac{i}{n}-1,\ \sum_{j=i+1}^{n}\frac{i}{j(j-1)}q_j\overline{W}(j)\}$, $1\leqq i\leqq n-1$, $\overline{W}(n)=1$.

(2.3) $p_i = \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}$ if $\overline{W}(i)\begin{Bmatrix}>\\ \leqq\end{Bmatrix}2\frac{i}{n}-1$, $1\leqq i\leqq n-1$, $p_n=0$.

(2.4) $q_i = \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}$ if $\overline{V}(i)\begin{Bmatrix}>\\ \leqq\end{Bmatrix}2\frac{i}{n}-1$, $1\leqq i\leqq n-1$, $q_n=0$.

p_i, q_i はそれぞれplayer II, I が i 番目で c_1 に直面しているときにrejectする確率である.

定理1: $i^* = \min\{1\leqq i\leqq n \mid i\geqq \frac{n}{2}\} = [\frac{n}{2}]$ とする. 最適playのもとで,

player I の最適政策は，i^*-1 まですべて pass し，i^*以後の最初の C_1 を accept しろ．player IIの最適政策は，i^*-1 まですべて pass し，i^*以後の最初の C_1 を accept しろ．両playerが最適政策にしたがったときの期待利得は，

player I：$V(1)=\frac{i^*-1}{n}\left(\sum_{j=i^*}^{n}\frac{2}{j-1}+1\right)-1$，player II：$W(1)=0$．

$\lim_{n\to\infty}\frac{i^*}{n}=\alpha$ とすると，$\alpha=0.5000$，$\lim_{n\to\infty}V^n(1)=-2\alpha\log\alpha+\alpha-1\fallingdotseq 0.1931$．

$\lim_{n\to\infty}W^n(1)=0$．

(略証) $V(i)$, $W(i)$ の解析は，g_i, p_i の解析に等しいことに注目して backward に g_i, p_i の値を調べる．

$$V(i)=\begin{cases}\frac{i^*-1}{n}\left(\sum_{j=i^*}^{n}\frac{2}{j-1}+1\right)-1, & 1\le i\le i^*-1\ (g_i=1)\\ 2\frac{i}{n}-1, & i^*\le i\le n\quad (g_i=0)\end{cases}\qquad W(i)=\begin{cases}0, & 1\le i\le i^*-1\ (p_i=1)\\ 2\frac{i}{n}-1, & i^*\le i\le n\quad (p_i=0).\end{cases}$$

□

§3. Bestか2nd Bestをacceptしたとき"win"であるB.S.P.

win：Best か 2nd Best をacceptした事象，lose：winでない事象(rej–rejは除く)

利得は，

I	II	I	II
win	lose	+1	−1
lose	win	−1	+1
rej.	rej.	0	0

ゼロ和ゲーム．

C_1, C_2：相対ランク 1, 2 の object．

$V_k(i)\equiv$ i番目で C_k $(k=1,2)$ に直面していてそれまでにacceptしていず，以後最適にふるまった時のplayer Iの期待利得．

i番目で C_1, C_2 に直面していて，それをacceptしたときのplayer Iの期待利得はそれぞれ $2g_i-1$, $2h_i-1$．ここで g_i, h_i はそれぞれ i番目で C_1, C_2 をacceptしたとき，それがBestか2nd Bestである

確率, すなわち, $g_i \equiv \frac{i}{n} + \frac{i(n-i)}{n(n-1)} = \frac{i(2n-i-1)}{n(n-1)}$, $h_i \equiv \frac{i(i-1)}{n(n-1)}$.

最適性の原理より次の最適方程式が成立する.

(3.1) $\bar V_1(i) = \max\{2g_i - 1,\ \min\{1-2g_i,\ u_i\}\}$, $2 \le i \le n-1$, $\bar V_1(n)=1$,

$\bar V_1(1) = \max\{2g_1 - 1,\ \min\{1-2g_1,\ \frac{1}{2}[\bar V_1(2)+\bar V_2(2)]\}\}$,

(3.2) $\bar V_2(i) = \max\{2h_i - 1,\ \min\{1-2h_i,\ u_i\}\}$, $2 \le i \le n-1$, $\bar V_2(n)=1$,

ここで $u_i \equiv \sum_{j=i+1}^{n} \pi_{ij}[\bar V_1(j)+\bar V_2(j)]$ & $\pi_{ij} \equiv \frac{i(i-1)}{j(j-1)(j-2)}$.

右辺 max{…}の中の第1項はaccept, 第2項はrejectしたときのplayer Iの期待利得に対応している. 定理2を導くために使う補題を準備する.

補題1: $\bar V_1(i) \ge 0$ for $1 \le {}^\forall i \le n$, $\bar V_2(i) \ge 0$ for $2 \le {}^\forall i \le n$, & $u_i \ge 0$ for $2 \le {}^\forall i \le n-1$.

(証明) 略. inductionによる.

定理2: 最適playのもとで両playerの最適政策を特徴付ける four numbers $1 \le \alpha_2 \le \alpha_1 \le \beta_2 \le \beta_1 \le n$ が存在し, 最適政策は,

player I: $\alpha_1 - 1$ まですべてpassし, α_1以後最初のC_1をaccept, もしくは, β_1以後の最初のC_1かC_2をacceptしろ.

player II: $\alpha_2 - 1$ まですべてpassし, α_2以後最初のC_1をaccept, もしくは, β_2以後の最初のC_1かC_2をacceptしろ.

$\hat\alpha_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_1}{n} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \fallingdotseq 0.2929$, $\hat\beta_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_1}{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} \fallingdotseq 0.7071$, $\hat\beta_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_2}{n} \fallingdotseq 0.5564$,

$\hat\alpha_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_2}{n} \fallingdotseq 0.2030$, $\hat\beta_2$, $\hat\alpha_2$はそれぞれ $4\log x + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} = 3 + 4\log\hat\beta_1$,

$4 + 4\hat\alpha_1 - 8\log\hat\alpha_1 - 2/\hat\alpha_1 + 2/\hat\beta_2 - 4\hat\beta_2 + 4\log\hat\beta_2 = 4(x - \log x)$ の(0, 1)間の単一根. player Iの期待利得は, $\lim_{n\to\infty} \bar V_1^n(1) = 2\hat\alpha_2^2 - 4\hat\alpha_2 + 1 \fallingdotseq 0.2704$.

(略証) backwardに$V_1(i)$, $V_2(i)$の差分方程式を解く.

$\alpha_2 = \min\{i \mid 1-2g_i \leq u_i\}$, $\alpha_1 = \min\{i \mid 2g_i - 1 \geq 0\}$, $\beta_1 = \min\{i \mid 2h_i - 1 \geq 0\}$,

$$\beta_2 = \min\left\{i \,\middle|\, 1-2h_i \leq \sum_{j=i+1}^{\beta_1-1} \frac{2(n-j)}{(j-1)(j-2)} + \sum_{j=\beta_1}^{n} \frac{(n-1)(2j-n)}{j(j-1)(j-2)}\right\},$$

$$V_1(i) = \begin{cases} u_i & , 1 \leq i \leq \alpha_2 - 1 \\ 1-2g_i & , \alpha_2 \leq i \leq \alpha_1 - 1 \\ 2g_i - 1 & , \alpha_1 \leq i \leq n \end{cases} \qquad V_2(i) = \begin{cases} u_i & , 2 \leq i \leq \beta_2 - 1 \\ 1-2h_i & , \beta_2 \leq i \leq \beta_1 - 1 \\ 2h_i - 1 & , \beta_1 \leq i \leq n \end{cases}.$$

$f(x) = \lim_{n\to\infty} V_1(\frac{i}{n})$, $g(x) = \lim_{n\to\infty} V_2(\frac{i}{n})$ とすると,

$$f(x) = \begin{cases} 2\hat{\alpha}_2^2 - 4\hat{\alpha}_2 + 1 & , 0 < x \leq \hat{\alpha}_2 \\ 2x^2 - 4x + 1 & , \hat{\alpha}_2 \leq x \leq \hat{\alpha}_1 \\ -2x^2 + 4x - 1 & , \hat{\alpha}_1 \leq x < 1 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 2\hat{\alpha}_2^2 - 4\hat{\alpha}_2 + 1 & , 0 < x \leq \hat{\alpha}_2 \\ -2x^2 + 4x\log x + K_2 x + 1 & , \hat{\alpha}_2 \leq x \leq \hat{\alpha}_1 \\ 2x^2 - 4x\log x + K_1 x - 1 & , \hat{\alpha}_1 \leq x \leq \hat{\beta}_2 \\ 1 - 2x^2 & , \hat{\beta}_2 \leq x \leq \hat{\beta}_1 \\ 2x^2 - 1 & , \hat{\beta}_1 \leq x < 1 \end{cases}$$

ここでK_1, K_2はある定数. □

数値例(ばっすい)

n	α_2	α_1	β_2	β_1	$V_1(1)$
10	2	3	6	8	0.2803
20	4	6	12	15	0.2786
30	6	9	17	22	0.2762
100	21	30	56	71	0.2719

n	α_2	α_1	β_2	β_1	$V_1(1)$
200	41	59	112	142	0.2712
300	61	88	167	213	0.2710
500	102	147	279	354	0.2708
1000	203	293	557	708	0.2704

§4. objectがplayerのacceptの申し出を拒否する確率をもつB.S.P.

win : Bestをacceptした事象.

利得構造は§1のB.S.Pと同じであるゼロ和game. 各objectは両playerのacceptの申し出を, 確率q ($0 \leq q \leq 1$, $p+q=1$)で拒否できる.

$V(i) \equiv$ i番目にC_1に直面しているとき以後最適にふるまったときのplayer Iの期待利得.

次の最適方程式が成立.

$$(4.1)\quad V(i)=\max\begin{cases} p(2\frac{i}{n}-1)+q\min\{p(1-2\frac{i}{n})+q\sum_{j=i+1}^{n}\pi_{ij}V(j),\ \sum_{j=i+1}^{n}\pi_{ij}V(j)\}, \\ \min\{p(1-2\frac{i}{n})+q\sum_{j=i+1}^{n}\pi_{ij}V(j),\ \sum_{j=i+1}^{n}\pi_{ij}V(j)\},\ 1\leq i\leq n-1 \end{cases}$$

$$V(n)=p^2.$$

ここで, $\pi_{ij} \equiv \frac{i}{j(j-1)}$.

asymptoticな性質に興味を移して, $x=\frac{i}{n}$, $n\to\infty$とすると(4.1)は(4.2)となる. $f(x)=\lim_{n\to\infty}V(\frac{i}{n})$,

$$(4.2)\quad f(x)=\max\begin{cases} p(2x-1)+q\min\{p(1-2x)+q\int_x^1 xy^{-2}f(y)dy,\ \int_x^1 xy^{-2}f(y)dy\} \\ \min\{p(1-2x)+q\int_x^1 xy^{-2}f(y)dy,\ \int_x^1 xy^{-2}f(y)dy\},\ 0<x<1 \end{cases}$$

$$f(1)=p^2.$$

定理3: 最適playのもとで,両playerの最適政策を特徴付ける$0<\alpha<\beta<1$が存在し, 最適政策は,

player I: βまですべてpassし, β以後最初のC_1をacceptしろ.

player II: αまですべてpassし, α以後最初のC_1をacceptしろ.

このときのplayer Iの期待利得は, $K_1\alpha^p+1$, ここでα, β, K_1は(4.5) (4.3) (4.4)で与えられる. 又, $p=1$とすると, $\alpha \fallingdotseq 0.412$, $\beta=0.5000$

Iの期待利得$\fallingdotseq 0.1756$.

(略証) (4.2)の微分方程式を解けば,

$$f(x)=\begin{cases} K_1\alpha^p+1 & ,\ 0<x\leq\alpha \\ K_1x^p+1 & ,\ \alpha\leq x\leq\beta \\ \frac{p}{1+q}((2-q^2)x^{1-q^2}-1) & ,\ \beta\leq x<1. \end{cases}$$

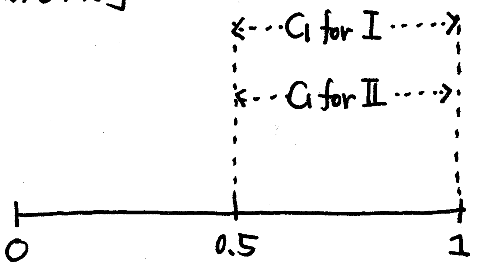
(4.3) β は $(4-2p)x - p(2-q^2)x^{1-q^2} = 2q$ の $(0,1)$ 間の unique root.

(4.4) $K_1 \equiv \frac{1}{1+q}\left[p(2-q^2)\beta^{pq} - 2\beta^{-p}\right]$, $K_2 \equiv \frac{1}{1+q}p(2-q^2)$.

(4.5) α は, $\frac{K_1}{p-1}(x\beta^{p-1} - x^p) + \frac{K_2}{q^2}(x\beta^{-q^2} - x) + \frac{p}{1+q}\left(x - \frac{x}{\beta}\right) + 2x = 0$ の
$(0,1)$ 間の unique root. □

§5. 最適政策の比較

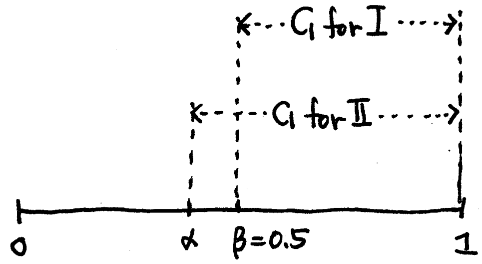
[§2のモデル]



$n \to \infty$
Expected Payoff of I $\fallingdotseq 0.1931$
(E.P.I)

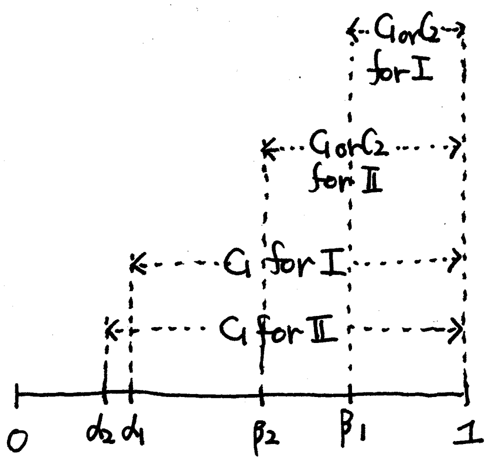
(記号) C_1 for I … player I はこの region で最初に出た C_1 を accept.

[§4のモデル]



$n \to \infty$, 特に $p = 1.0$ のとき
$\alpha \fallingdotseq 0.4120$
$\beta \fallingdotseq 0.5000$
E.P.I $\fallingdotseq 0.1756$.

[§3のモデル]



$n \to \infty$
$\alpha_2 \fallingdotseq 0.2704$
$\alpha_1 \fallingdotseq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \fallingdotseq 0.2929$
$\beta_2 \fallingdotseq 0.5564$
$\beta_1 = 1 - \alpha_1 \fallingdotseq 0.7071$
E.P.I. $\fallingdotseq 0.2704$.

References

[1] Roth, R., Kadane, J. B. and DeGroot, M. H., "Optimal peremptory challenges in trials by juries : A bilateral sequential process," O.R, 25, 901–919 (1977).

[2] DeGroot, M.H. and Kadane, J. B. "Optimal sequential decisions in problems involving more than one decision maker," in M.H. Rizvi, J. S. Rustagi. and D. Siegmund (ed.) Recent Advance in Statistics, Academic Press, London, 197–210 (1983).

[3] Sakaguchi, M. "Bilateral sequential games related to the no-information secretary problem," Mathematica Japonica, 29, 961–973 (1984).

[4] Enns, E.G. and Ferenstein, E. "The horse game," J.O.R.S.J, 28, 51–62 (1985).

[5] Smith, M.H. "A secretary problem with uncertain employment," J.A.P, 12, 620–624 (1975).